

彩票魔力 vs 数学威力

摘要

“彩票飓风”席卷中华大地，魔力之大确为世人惊叹！然而，魔高一尺，道高一丈，基于实践背景的数学原理定会迸发出无穷的威力，今日，它又略胜一筹。

本文从实际背景出发，结合当今经济背景及心理学背景知识，对29种主流销售规则进行了分析，做出了既大胆又基于背景理论的设想，即(1)经过市场竞争后存活下来的29种主流销售规则必具有一定的可相互比拟的竞争力，(2)彩民决定投注时有三种主要心理因素：(受一等奖巨额奖金诱惑：受大奖覆盖面诱惑：受总奖项覆盖面大诱惑)且这三种因素对足够大的人群有个相对稳定的平均比例。从29种销售规则中反推规律，寻找出了合理的覆盖了“各种奖项出现的可能性”、“奖项和奖金额的设置”及“对彩民各种心理因素的吸引力”等信息的“竞争力”指标公式。为保证此竞争力指标公式的正确性，我们分三种不同的方法对其进行了验证(理论参数验证，历史数据验证和实践调查验证)。后以此“竞争力”为基础(因其客观地覆盖了多种因素)，更细微地对原有各方案的合理性进行了分析评价。

在得出及验证“竞争力”定义的过程中，我们还附带得出并验证了一个确定的三种心理因素在彩民中的平均比例，后来又将此信息代入竞争力指标公式，加上对其它方面的考虑，我们在一个自定义较“合理”的范围内寻找出了一些“更好”的方案，并在这些方案中再次求得最优，给彩票管理部门做了建议。

在前面的分析中，我们得到了很多规律，在文章的最后，我们完成了一篇发给报纸的短文。此短文的特点是：通俗易懂，从表象入手，向处在不同环境中且有着不同心理因素占上风的彩民给出了一些很好的参考。

总的说来，本文想法独特，找到了一种可衡量彩票规则“竞争力”的公式，得出的模型经得住理论和实践的考验。另外，我们的思想和方法还可以用于其它各种彩票发行及管理部门参考。

彩票魔力 vs 数学威力

§1 问题叙述

近年来，“彩票飓风”席卷中华大地，巨额诱惑使越来越多的人加入到“彩民”的行列。目前流行的彩票销售规则及方案多种多样，奖项及奖金的设置日益复杂，数学理论对彩票管理部门及彩民将越来越重要。本文即欲对现有方案的具体情况进行分析，从各种奖项出现的可能性、奖项和奖金额的设置以及对彩民的吸引力等因素中得出一些结论供彩票管理部门和彩民参考。

§2 建立模型

§2.1 确定竞争力模型

1. 背景叙述:

a) 经济背景: 近几年来, 彩票市场经受过市场经济大潮的洗礼后, 已日趋成熟。各彩票发行部门在竞争过程中不断将销售规则向着有利于自己的方向改进, 但竞争毕竟是残酷的, 留下的只能是少数和强者。目前流行的彩票销售规则种类已所剩不多, 奖项的设置也相差不多, 并都拥有较强的可相互比拟的竞争力。

b) 心理背景: 每个人都是一个矛盾的统一体, 有着复杂的心理状况。据不完全统计, 彩民买彩票时有三种主流支配心理因素: 易受一等巨额奖金诱惑; 易受一二三等奖覆盖面诱惑; 易受总奖项覆盖面诱惑。尽管对单个彩民来说这三种心理因素所占的比例无法确定, 但当对足够多数量的彩民群, 这三种心理因素将有个确定的比例。

2. 模型假设:

a) 题目附表给出的 29 种销售规则代表了当今主流的彩票销售方案, 竞争力差不多。

b) 每种销售规则与其竞争对手所面对的彩民的平均心理因素分配比例相同。

3. 模型参数:

f_i : 第 i 种销售规则的竞争力 (后面将定义)。

$(a : b : c)$ 彩民的心理因素在三种诱惑 (受一等奖巨额奖金诱惑: 受大奖覆盖面诱惑: 受总奖项覆盖面大诱惑) 上的平均分配比例。

A_i : 第 i 种规则以一等金额吸引彩民的能力指标。

B_i : 第 i 种规则以大奖覆盖面吸引彩民的能力指标。

C_i : 第 i 种规则以总中奖覆盖面吸引彩民的能力指标。

x_i : 第 i 种规则中一等奖的期望奖金。

y_i : 第 i 种规则中一、二、三等奖的概率和。

z_i : 第 i 种规则中总的中奖概率和。

4. 模型的建立与求解:

(A)定义:

$$A_i = \frac{x_i - \min\{x_j\}}{\max\{x_j\} - \min\{x_j\}} \quad B_i = \frac{y_i - \min\{y_j\}}{\max\{y_j\} - \min\{y_j\}} \quad (**)$$

$$C_i = \frac{z_i - \min\{z_j\}}{\max\{z_j\} - \min\{z_j\}}$$

$$f_i = a * A_i^\alpha + b * B_i^\beta + c * C_i^\gamma$$

(注: 各种规则对应各奖项的中奖概率见附录一)

(B)定义的合理性:

A_i : 指在现有主流彩票市场中, 以一等奖期望奖金最高者为 1、最低者为 0 的标度给第 i 种规则一种度量, 它能表达第 i 种规则吸引彩民的能力大小。(注: 其中我们有意不加考虑 500 万这一上限, 因为一等奖期望奖金超过得越多, 它能达到 500 万的概率就越大, 从而就更有吸引力)

B_i 和 C_i 的定义与 A_i 的定义同理。

f_i : 1) 依照现在常见的总奖金比例规则 (销售额的 50%) 各种规则若想存活, 则必须有足够多的投注; 反过来, 有能力使销售额足够大的销售规则必然会在竞争中获胜。于是我们认为, 各种规则的竞争力必有绝大部分依赖于它的各种吸引能力指标。

2) 这种竞争力应该随它各方面吸引能力的增大而增大; 人的心理状态相当复杂, 一般不会随某一指标线性变化; 考虑到幂函数可由指数的大小控制其增长速度, 且幂函数的形式比较简单, 处理起来相对方便, 我们决定用幂函数的线性和来定义 f_i 。后面将会以

三种方式对此定义进行检验。

(C) **参数的计算** 为计算这几个参数，由假设 a), 我们可以合理的设 f_i 均在 1 左右浮动 (因为 a:b:c 只是一个比例, 这里的 1 只是一个表达竞争力相对强弱的指标)

则得到如下的计算公式:

$$\begin{cases} \min z = \sum_{i=1}^{29} (f_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{29} (aA_i^\alpha + bB_i^\beta + cC_i^\gamma - 1)^2 \\ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \end{cases}$$

用 Excel 规划求解, 得到一组收敛解:

$$\begin{aligned} a &= 0.863140582, & b &= 0.775749724, & c &= 0.343762897 \\ \alpha &= 0.313823761, & \beta &= 1.044806185, & \gamma &= 1.300998591 \end{aligned}$$

即

$$f_i = 0.863 * A_i^{0.313} + 0.775 * B_i^{1.045} + 0.344 * C_i^{1.301}$$

按该公式计算得各方案的竞争力 $f_i (i = 1, 2, \dots, 29)$ 的值依次如下:

0.77	0.97	1.00	1.02	1.05	0.83	0.99	1.09	1.13	0.87
1.04	0.95	0.97	0.99	0.96	1.02	0.97	1.02	1.01	0.99
0.98	1.06	0.90	1.01	1.02	1.05	1.01	1.10	1.08	

(D) **参数的合理性:**

a): 由 a,b,c 的比例知, 全体彩民的平均心理因素比较偏向一等奖的奖金和得高项奖的概率, 这很符合实际, 因为多数彩民若不是受大奖诱惑几乎不会去买彩票。

b): $\alpha < 1$, 表示人们被一等奖奖金诱惑的程度增长速度并不是很快, 我们易知, 当一等奖奖金太高时, 中一等奖的概率相对会很低, 此时这一低概率又会降低诱惑彩民的程度。

c): $\beta \approx 1, \gamma > 1$, 表示人们被中大奖的概率的诱惑程度会因概率的增大而几乎线性增大。而被总中奖概率的诱惑程度则会因概率的增大而更快的增大, 这是因为彩民受诱惑的程度对中奖概率的增大很敏感。

5. 模型检验:

由于这种自定义的抽象“力”不很容易检验,所以我们设置了三种不同的不完全检验方法(第三种在后面一节中):

a) 理论参数检验(对参数):我们随机抽掉某一种规则,用同样的原理应用 Excel 规划求解,得到一组新的参数,发现 a,b,c 的比例基本没有改变, α, β, γ 的值也比较稳定:例如,当抽掉第 23 种规则,对其余 28 种规则进行分析,得到参数如下:

$$a = 0.906239214, \quad b = 0.741798317, \quad c = 0.372795574$$

$$\alpha = 0.286129914, \quad \beta = 1.059121545, \quad \gamma = 1.301957895$$

与 29 种时得到的参数几乎吻合,这验证了此模型参数的稳定性和模型的正确性(这种检验是合理的,因有 28 种规则的彩票市场和有 29 种的差不多)

b) 历史数据检验:为验证该模型的正确性,我们从彩票网(<http://www.cn-loans.com>)上找到了如下数据:

表 1: 江苏彩票销售额(万)对比

传统 6 + 1/10		30 选 7	
日期	销售额	日期	销售额
02/5/10	176	02/8/26	253
02/5/07	175	02/8/23	242
02/4/16	199	02/8/26	216

表 2: 齐鲁彩票销售额(万)对比

30 选 7		36 选 7	
日期	销售额	日期	销售额
02/9/13	118	02/9/08	202
02/9/11	125	02/9/05	175
02/8/30	130	02/9/01	182

表 3: 上海彩票销售额(万)对比

35 选 7		37 选 7	
日期	销售额	日期	销售额
02/9/18	106	02/9/20	224
02/8/31	117	02/9/13	219
02/8/26	131	02/8/29	211

表 4: 广西彩票销售额(万)对比

29 选 7		37 选 7	
日期	销售额	日期	销售额
02/8/16	241	02/8/18	497
02/8/02	217	02/8/05	483
02/7/26	231	02/7/29	428

如表 1, 江苏传统 6 + 1/10 类似于方案 4(竞争力 0.97), 30 选 7 类似于方案 10(竞争力 1.09). 6 + 1/10 的销售额明显小于 30 选 7 的销售额, 这与前者的竞争力小于后者的相吻合; 再看表 2, 齐鲁 30 选 7 类似于方案 9(竞争力 0.99), 36 选 7 类似于方案 26(竞争力 1.05), 这也与销售额的大小关系吻合; 表 3、表 4 中也有同样的规律。这说明了我们定义的竞争力符合实际的情况。

6. 模型分析:

(1) 本模型是基于实际背景, 在 a), b) 两种假设的条件下得到的, 且

曾经过实践的检验，具有实践应用意义。

(2) 经验证，本模型的参数在缺少一种规则的彩票市场中也几乎一致，这说明我们的模型有一定的稳定性。

(3) 由于彩票规则只有 29 种，不足以为我们提供足够信息以得出 a:b:c 的确切比例，我们得到的值必会有误差（我们可以看到这种误差比较小），这就导致所得的“竞争力”可能会有误差。但我们认为，这个竞争力只是一个相对数字，况且我们的竞争力的排序与实际检验的结果几乎一致，有理由相信我们的模型。

(4) 若能得到更确切的心理实验数据，我们的模型将会得到较大的改进或较好的验证。

§2.2 原有各方案合理性评价

1. 参数及算法:

a) D_{ij} : 我们可以算出某种销售方案的高项奖的期望奖金。设一期售出 n 注，用 p_{ij} 表示第 i 种方案第 j 个奖项的中奖概率， M_{ij} 表示第 i 种方案第 j 个奖项的奖金 ($j = 4, 5, 6, 7$)， k_{ij} 表示第 i 种方案第 j 个奖项的奖金分配比例。则奖金总额为 $2n * 50\% = n$ 元，低项奖总额为 $np_{i4}M_{i4} + np_{i5}M_{i5} + np_{i6}M_{i6} + np_{i7}M_{i7}$ ，而中第 j 等奖的注数为 np_{ij} ，所以第 j 等奖期望奖金

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{(2n * 50\% - np_{i4}M_{i4} - np_{i5}M_{i5} - np_{i6}M_{i6} - np_{i7}M_{i7})k_{ij}}{np_{ij}} \\ &= \frac{(1 - p_{i4}M_{i4} - p_{i5}M_{i5} - p_{i6}M_{i6} - p_{i7}M_{i7})k_{ij}}{p_{ij}} \quad j = 1, 2, 3 \\ d_{ij} &= M_{ij} \quad j = 4, 5, 6, 7 \quad i = 1, 2, \dots, 29 \end{aligned}$$

故第 i 种方案中每注彩票分在第 j 等奖的期望奖金

$$\begin{aligned} D_{ij} &= d_{ij}p_{ij} = (1 - p_{i4}M_{i4} - p_{i5}M_{i5} - p_{i6}M_{i6} - p_{i7}M_{i7})k_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \\ D_{ij} &= M_{ij}p_{ij} \quad j = 4, 5, 6, 7 \quad i = 1, 2, \dots, 29 \end{aligned}$$

b): H_i : 第 i 种方案中每注彩票分在全部高项奖的期望奖金

$$H_i = D_{i1} + D_{i2} + D_{i3}$$

(注: 我们对第 23 种规则做了处理，将二等奖及其以后的奖项向后推了两位: 令二、三等奖得奖概率为零，奖金为零，令四等奖得奖

概率及奖金的设置如原二等奖的, 以此类推到七等奖, 这样做的目的是保证“高项奖”的意义)。

2. 评价:

首先, 各方案都具有一定的合理性, 如竞争力都达到了较大的高度, 对公司都比较有利; 每注中分在一等奖的期望收益与每注中分到高项奖中的期望收益都比较高, 对彩民比较有利。但在各具体方面, 总有些规则不很合理。我们从两个方面来进行评价。

公司:

因本文所定义的“竞争力”客观的覆盖了多种因素(包括各种奖项出现的可能性; 在定义式的三个项中均有体现; 奖项和奖金的设置; 在定义式的首项中有所体现; 及对彩民的吸引力)故若按我们所定义的竞争力指标相对太低 - 比如方案 1, 6, 10, 23 的竞争力指标都不超过 0.90, 就不大合理。从竞争力出发, 我们又可得到以下结论:

(a) 高项奖得奖概率不宜过低, 如“传统型”和“乐透型”的比较:

我们对它们竞争力的计算表明, 传统型竞争力总体水平较乐透型低,

现状也证明传统型在市场上所占的比例正在日渐减少(网上所能查到的所剩无几的传统型, 每期的销售量明显比其它类型低)。

我们的分析是:(见附录二的图 1)传统型高项奖得奖概率明显低于乐透型, 这一表象该是它们竞争力较低的主要原因。(尽管它的一注在高项奖上分配的期望金额比较高(见附录二的图 2))

(b) 为避免一等奖的奖金额太小, 中奖概率大的奖项数目不应设置过多且低项奖的金额要较小. 如竞争力较低的方案 6, 7, 10 的一等奖奖金的期望都低于 80 万, 已没有足够的能以一等奖奖金吸引彩民。一般方案的一等奖奖金在 100 万到 500 万之间。

彩民:

(a) 奖金金额与中奖难度应有一定的比例. 比如方案 1 中三等奖奖金是四等奖奖金的 320 多倍, 而中四等奖的概率只是中三等的 14.5 倍, 这对中四等奖的彩民就不合理; 方案 24, 25 的一二等奖的期望奖金之比都大于 210, 对中二等奖得彩民不公平。

而其它方案均较合理，在 30 到 55 之间（见附录二的图 3）。

- (b) 有些一等奖金的平均值虽然大于 500 万，对彩民的诱惑不小，但很可能没有实现 50% 的返奖率。其实质是一等奖的中奖概率太小或一等奖奖金在高项奖中占的比例太高而没有滚动到下一次。

§2.3 确定新方案

1. 依据:

- a) 保证竞争力比现有的大（对公司有利）.
- b) 奖项、奖金设置更合理（对彩民有利）.

2. 方法:

a) 以给出的各种方案为模板，在满足上述合理性要求的范围内，以适当的步长，改变奖项数和低项奖奖金额及高项奖的比例分配，让计算机采用枚举法寻找使竞争力最高的最优解。（Matlab 程序见附录 3）在各种方案中找到一组最优解（见附录 4）

b) 改变奖项方案，我们试验了另外几种 $6/n, 5+1/n, 8/n, 7+1/n$ 等的方案，都不能得到竞争力更高的方案。

c) 经对 a) 中结果再次筛选分别得到一组传统型方案和一组乐透型方案如下:

(1) 传统型（新 1）: $6 + 1/10$ 75% 10% 15% 50 20 5
竞争力: 1.0690

(2) 乐透型（新 2）: $7/30$ 75% 10% 15% 200 40 10 5
竞争力: 1.1224

3. 实践调查检验（兼做竞争力的实践检验）:

我们在学校附近两个彩票销售点散发了 100 张调查彩民对方案 4、8、19、新 1（传统 $6+1/10$ ）、新 2（ $7/30$ ）购买倾向的问卷（见论文的最后一页），收回有效答卷 54 张。统计结果如下:

方案	4	8	19	新 1	新 2
票数	985	1140	1080	1015	1180
竞争力	1.02	1.09	1.01	1.07	1.12

由以上数据可看出: 竞争力指标与彩民的购买意愿基本吻合，而且还证明了我们的新方案确实更能吸引彩民。

4. 结论: 我们得到的新 1 与新 2 两种方案虽然分别是传统型和乐透

型中的“更好的”方案，但从前面对合理性的分析中知乐透型更令人满意，再从它们的竞争力也可看出，我们的最佳方案是：

乐透型： 7/30 75% 10% 15% 200 40 10 5

竞争力：1.1224

§2.4 给管理部门的建议

(1) 设计新方案时注意兼顾彩票发行公司和彩民的利益。

(2) 参考我们对合理性的评价，及我们设计新方案的算法，推荐应用我们的新方案。

(3) 为了确保 50% 的返奖率，以提高彩民购买彩票的积极性，使彩票“长售不衰”，我们的方案中可以加入将超过封顶奖金的那部分奖金滚动到下一期。不封顶可能导致的千万巨奖虽可能吸引更多的彩民，但容易导致彩民心态失常，带来严重的社会后果。我们仍采用 500 万封顶的规则。考虑到我们的一等期望奖金为 105 万，大于 60 万很多，为保护彩民利益，我们决定将保低金额适当提高到 65 万到 80 万。

§3 写给报纸的短文

面对形形色色的大奖诱惑，彩民们是否觉得眼花缭乱、无所适从呢？如何才能选择一种适合自己的彩票呢？以下是我们给彩民朋友的一些建议：

(1) 对那些看中一等巨额奖金或梦想中大奖的彩民来说，“乐透型”是一个比较明智的选择。“乐透型”有多种方案，主要是“7/n”型，其中 n 从 29 到 37 不等。

如果你有多种方案可供选择，那么选择 n 较大、对应的奖项数较少且低项奖金额较小的方案购买彩票，你获得一等奖而一举成为百万富翁的可能性就会大大增加；对那些想中高项奖（一、二、三等奖）的彩民朋友来说，n 较小且低项奖金额较小的彩票是不错的选择；如果你只想过把中奖瘾，只需选 n 较小，奖项数多且低项奖金额较高的方案即可。

如果你不幸只能够买一种方案（如 7/33）的彩票，我们也有应对之策。想中一等的高额奖金的彩民最好选奖项较少、一等奖金比例高且低项奖金额少的彩票；若选择奖项少，低项奖金额少的彩票，中大奖的可能性就比较大；如果你觉得能中奖就行了，那当然得选奖项多

的。

(2) “传统型”在一等奖的金额、中大奖的概率两方面都无法与乐透型相比，但它的中奖（包括低项奖）概率比“乐透型”大许多。由于现在“传统型”彩票越来越少，彩民朋友不要为此大伤脑筋。

参考文献

- [1] 数学模型与数学建模，刘来福，北师大出版社，1997
- [2] 彩票网 [Http://www.cn-loans.com](http://www.cn-loans.com)